

Jugend forscht 2011

Fachgebiet Mathematik/Informatik

Wettbewerbsbeitrag zum Thema

**Verallgemeinerung des  
RIEMANN-Integrals auf den  $\mathbb{R}^n$**

von CHRISTIAN MÜLLER

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	Einleitung	<b>ii</b>
<b>1</b>	Wiederholung: Integrieren im $\mathbb{R}^1$	<b>1</b>
<b>2</b>	Integrieren im $\mathbb{R}^n$	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Der Satz von Fubini und die Transformationsformel</b>	<b>3</b>
3.1	Der Satz von Fubini . . . . .	4
3.2	Normalbereiche . . . . .	6
3.3	Die Transformationsformel . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Wichtige Koordinatentransformationen</b>	<b>8</b>
4.1	Polarkoordinaten . . . . .	8
4.2	Zylinderkoordinaten . . . . .	8
4.3	Kugelkoordinaten . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Beispiele</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Physikalische Anwendungen</b>	<b>12</b>
6.1	Volumen . . . . .	12
6.2	Masse . . . . .	12
6.3	Schwerpunkt . . . . .	13
6.4	Trägheitsmoment . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>16</b>
7.1	Visualisierung von Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten . . . . .	16
7.2	Visualisierung des Beispielkörpers . . . . .	17
	<b>Literatur</b>	<b>20</b>

## 0 Einleitung

Diese Arbeit bietet eine Einführung in die Integralrechnung in mehreren Veränderlichen und erweitert damit die Methoden der eindimensionalen Integralrechnung aus der Schule auf mehrdimensionale Fälle. Sie wurde ursprünglich als Facharbeit im Mathematik-Leistungskurs der Klasse 12 am HELMHOLTZ-Gymnasium Hilden unter dem Titel „Gebietsintegrale“ erstellt und sowohl äußerlich als auch inhaltlich verbessert und korrigiert.

Der Aufbau gliedert sich in 6 Abschnitte. In Abschnitt 1 wird zuerst kurz der Begriff des RIEMANN-Integrals im eindimensionalen Fall, so wie er aus der Schule bekannt ist, wiederholt. Direkt im Anschluss erfolgt die Erweiterung der Integralrechnung auf mehrdimensionale Fälle und damit die Einführung der sogenannten Gebietsintegrale. Wir beschränken uns dabei jedoch auf das Konzept des RIEMANN-Integrals und lassen das modernere und für die Anwendungen effektivere LEBESGUE-Integral außen vor. Für die vorkommenden Beispielrechnungen ist dies kein Problem, da sich dabei beide Integralbegriffe im Ergebnis nicht unterscheiden. Allerdings bringt diese Vorgehensweise ein paar Schwierigkeiten mit sich, zwei der wichtigsten Sätze zur Berechnung von Gebietsintegralen exakt zu beweisen, da hierfür Begriffe der Maß- und Integrationstheorie, die Grundlage für das LEBESGUE-Integral ist, erforderlich sind. Im Falle der Transformationsformel aus Abschnitt 3.3, welcher nach einem Gespräch mit Herrn Prof. SINGHOF entstand, der mir darüberhinaus freundlicherweise das Buch [5] zur Verfügung stellte, wird aber zumindest die anschauliche Vorgehensweise dargestellt. Der Beweis des Satzes von FUBINI in Abschnitt 3.1 ist [2] entnommen und an einigen Stellen mit erläuternden Erklärungen versehen. An den theoretischen Teil anknüpfend werden in Abschnitt 4 drei wichtige Koordinatentransformationen vorgestellt, die zusammen mit der Transformationsformel helfen, viele der Beispiele in Abschnitt 5 auf einfachem Wege zu berechnen. Zum Schluss wird in Abschnitt 6 ein Einblick in Anwendungsmöglichkeiten von Gebietsintegralen in der Physik gegeben, welche durchgehend an einem konkreten dreidimensionalen Beispielkörper (siehe Abschnitt 6.1) illustriert und durchgerechnet werden. Im Anhang finden sich mit Maple 14 erstellte Grafiken dieses Körpers sowie der in Abschnitt 4 angesprochenen Koordinatensysteme.

Die schon oben angesprochenen Schwierigkeiten, den RIEMANN-Integralbegriff zu verallgemeinern und auf das LEBESGUE-Integral zu verzichten, ließen sich heute zwar beheben, da ich im Rahmen des Projekts „Schüler an die Uni“ der HEINRICH-HEINE-Universität Düsseldorf im Wintersemester 2010/2011 die Vorlesung „Analysis III“ gehört habe, in der die Maß- und Integrationstheorie zusammen mit dem LEBESGUE-Integral behandelt werden. Jedoch hätte dies ein nahezu komplettes Neuverfassen der vorherigen Facharbeit erfordert, da ich mir diese Inhalte zu dem Zeitpunkt, zu dem die Facharbeit entstanden ist (Ende 2009), nicht erarbeitet hatte. Außerdem hätte dies eher zu einer Wiedergabe der Vorlesung als zu einer selbstständigen Arbeit geführt, weswegen die ursprünglichen Inhalte der Facharbeit beibehalten wurden. Zudem würde eine ausführliche Behandlung des LEBESGUE-Integrals diese Arbeit sehr viel theoretischer machen, was aber nicht ihr Ziel ist, da vor allem Rechentechniken und die praktischen Anwendungsmöglichkeiten betont werden sollen.

Inhaltlich vorausgesetzt werden Grundbegriffe der Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher, insbesondere partielle Ableitungen und Funktionalmatrix, Methoden der Linearen Algebra, insbesondere Matrizen und Determinanten, sowie die Berechnung von Integralen in einer Veränderlichen, da dies die Grundlage für den höherdimensionalen Fall ist.

Im Zuge der Umgestaltung dieser Arbeit von der Facharbeit zur Jugend forscht Arbeit kam meinem betreuenden Lehrer Herr OSTERWIND und mir die Idee, einen Beispielkörper, ähnlich dem oben angesprochenen als Anschauungsobjekt herstellen zu lassen. Nach Anfrage beim Unternehmen 3M, mit dem unsere Schule schon öfter zusammengearbeitet hat, ist der aktuelle Stand, dass die dortigen Ansprechpartner sich bei Partnerunternehmen erkundigen, ob sich unsere Idee dort realisieren lässt. Konzernintern ist das wohl nicht möglich.

# 1 Wiederholung: Integrieren im $\mathbb{R}^1$

Integrieren im  $\mathbb{R}^1$  heißt Integrieren über einem Intervall. Wir betrachten für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  also ein *kompaktes* bzw. *abgeschlossenes* Intervall  $[a, b]$ , d.h. die Randpunkte  $a$  und  $b$  sind Teil des Intervalls. Ziel ist es, die Fläche unter dem Graphen einer reellwertigen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  über dem Intervall  $[a, b]$  zu bestimmen. Wir nähern den Graphen dazu durch *Treppenfunktionen* sowohl von oben als auch von unten an. Dabei heißt eine Funktion  $\alpha$  eine Treppenfunktion, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  und eine Zerlegung  $(x_0, \dots, x_n)$  des Intervalls  $[a, b]$  mit  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  und

$$a = x_0 < \dots < x_n = b$$

gibt, sodass  $\alpha$  auf allen offenen Teilintervallen  $]x_{k-1}, x_k[ \subset [a, b]$  für  $k = 1, \dots, n$  konstant ist und jeweils den Wert  $c_k \in \mathbb{R}$  annimmt. Mit  $\mathcal{T}[a, b]$  bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall  $[a, b]$ . Wir setzen dann:

$$\int_a^b \alpha(x) dx := \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Das Integral einer Treppenfunktion sei also die Summe der Inhalte aller Rechteckflächen unter dem Graphen der Treppenfunktion. Diese Rechtecke können auch unterhalb der  $x$ -Achse liegen, sodass die Flächen dann negativ gezählt werden.

Wir nähern nun die Funktion  $f$  durch Treppenfunktionen  $\alpha, \beta \in \mathcal{T}[a, b]$  an, wobei stets  $\alpha \leq f \leq \beta$  gelten soll, d.h.

$$\alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a, b],$$

und bilden von der Menge aller Integrale von Treppenfunktion über  $[a, b]$ , die größer oder gleich bzw. kleiner oder gleich der Funktion  $f$  sind, das Infimum bzw. Supremum und nennen diese beiden Größen das *Oberintegral* bzw. *Unterintegral* von  $f$ :

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} := \inf \left\{ \int_a^b \beta(x) dx \mid \beta \in \mathcal{T}[a, b] \text{ und } f \leq \beta \right\},$$

$$\underline{\int_a^b f(x) dx} := \sup \left\{ \int_a^b \alpha(x) dx \mid \alpha \in \mathcal{T}[a, b] \text{ und } \alpha \leq f \right\}.$$

Das Ober- und Unterintegral von  $f$  sind Zahlen, da beide Mengen ebenfalls Zahlen, nämlich alle möglichen Flächeninhalte unter Treppenfunktionen, beinhalten. Stimmen diese beiden Zahlen überein und ist dieser Grenzwertprozess unabhängig von den gewählten Treppenfunktionen, so heißt  $f$  *RIEMANN-integrierbar*. Man nennt diesen Wert das *bestimmte Integral* von  $f$  und schreibt dafür

$$\int_a^b f(x) dx.$$

**Bemerkung:** Man kann zeigen, dass sowohl monotone als auch stetige Funktionen in diesem Sinne stets integrierbar sind. Ist eine Funktion auf ihrem Definitionsbereich nicht monoton, so kann man diesen jedoch so unterteilen, dass die Funktion auf jedem der Teilbereiche monoton ist und kann dann die einzelnen Integrale aufsummieren. Somit sind alle häufig auftretenden Funktionen, insbesondere solche, die wir später als Beispiele betrachten werden, integrierbar, sodass wir uns um die Existenz des Integrals keine Sorgen machen müssen.

Doch die hier vorgestellte Definition des RIEMANN-Integrals führt schon bei recht einfachen Funktionen wie zum Beispiel der Funktion

$$D : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\} \quad , \quad D(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

zu Problemen. Diese auch *DIRICHLETsche Sprungfunktion* genannte Funktion ist an jeder Stelle aus  $[0, 1]$  unstetig, denn sie springt ständig zwischen den Funktionswerten 0 und 1 hin und her, da die rationalen Zahlen nicht *vollständig* sind, d.h. zwischen je zwei rationalen Zahlen liegen beliebig viele reelle Zahlen. Daher lässt sich der Graph von  $D$  auch nicht sinnvoll zeichnen; er sähe aus wie zwei zur  $x$ -Achse parallele Linien, was nicht gerade der Vorstellung einer Funktion entspricht. Versucht man aber

nun diese Sprungfunktion durch Treppenfunktionen von oben und unten anzunähern, so kommt man von unten nicht weiter als bis zum Funktionswert 0, von oben hingegen nur bis zur 1. Die beiden Grenzwerte, 0 für das Unterintegral und 1 für das Oberintegral, stimmen also nicht überein, daher existiert das RIEMANN-Integral für diese Funktion nicht.

Man braucht hier eine bessere Definition des Integrals, das sogenannte LEBESGUE-Integral (nach HENRI LÉON LEBESGUE, 1875-1941), welches im Rahmen der *Maßtheorie* berücksichtigt, dass  $\mathbb{R}$  im Vergleich zu  $\mathbb{Q}$  überabzählbar ist, d.h.  $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$ , und  $\mathbb{Q}$  somit eine Nullmenge in  $\mathbb{R}$  ist. Deswegen nimmt die oben definierte Funktion den Funktionswert 0 „viel öfter“ an als den Funktionswert 1 und das LEBESGUE-Integral liefert einen Wert und damit einen „Flächeninhalt“ von 0.

Wie oben erwähnt, konzentrieren wir uns hier aber nur auf das RIEMANN-Integral, da wir insbesondere nur stetige Funktionen betrachten wollen, bei denen beide Integralbegriffe grundsätzlich denselben Wert liefern.

## 2 Integrieren im $\mathbb{R}^n$

Wir verallgemeinern den Integralbegriff nun zwar sofort vom  $\mathbb{R}^1$  auf den  $\mathbb{R}^n$ , betrachten dabei jedoch zuerst die einfachsten Integrationsgebiete, bevor wir diese später ebenfalls auf (fast) beliebige Gestalt ausdehnen.

Im Eindimensionalen ist der einfachste Integrationsbereich ein kompaktes Intervall der Form  $[a, b]$ ; viele weitere Möglichkeiten gibt es auch nicht. Im Mehrdimensionalen sprechen wir von einem *Quader*. Für  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$  und  $j = 1, \dots, n$  heißt eine Teilmenge  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  ein ( $n$ -dimensionaler, halboffener) Quader, wenn  $Q$  folgenden Form hat:

$$Q := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \leq x_1 < b_1, \dots, a_n \leq x_n < b_n \right\} = [a_1, b_1[ \times \dots \times [a_n, b_n[.$$

Mit  $\mathcal{Q}^n$  bezeichnen wir die Menge aller Quader in  $\mathbb{R}^n$ . Die  $a_j$  und  $b_j$  markieren hierbei die Randpunkte der entsprechenden halboffenen Intervalle, die die Seiten des Quaders darstellen. Der Quader selbst ist also das kartesische Produkt aller seiner Seiten. Demzufolge ist ein Intervall mit  $n = 1$  ebenfalls ein Quader, im Fall  $n = 2$  erhält man eine Fläche, für  $n = 3$  einen ganz normalen räumlichen Quader und schließlich für  $n \in \mathbb{N}$  den auf  $n$  Dimensionen verallgemeinerten Quader. Das Volumen eines solchen  $n$ -dimensionalen Quaders ergibt sich als Produkt seiner Seiten:

$$V(Q) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Analog zu vorhin wollen wir nun das Integral einer mehrdimensionalen Treppenfunktion  $\alpha : Q \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $Q \in \mathcal{Q}^n$  definieren. Dazu zerlegen wir den Definitionsbereich  $Q$  der Treppenfunktion  $\alpha$  in endlich viele paarweise disjunkte Teilquader  $Q_i \subseteq Q$  mit  $i = 1, \dots, N$  und  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $Q = \bigcup_{i=1}^N Q_i$  gilt, woraus folgt, dass

$$V(Q) = \sum_{i=1}^N V(Q_i)$$

ist. Die letzte Gleichung ist nur erfüllt, wenn  $Q$  auch wirklich die disjunkte Vereinigung der  $Q_i$  ist, da sich die Teilquader sonst überlappen könnten und einzeln aufsummiert ein größeres Volumen ergeben würden. Eine Treppenfunktion nimmt nun auf jedem dieser Teilquader  $Q_i$  einen konstanten Wert  $c_i \in \mathbb{R}$  an, also  $\alpha(\mathbf{x}) = c_i$ , falls  $\mathbf{x} \in Q_i$ . Mit  $\mathcal{T}(\mathcal{Q}^n)$  bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf einem Quader  $Q \in \mathcal{Q}^n$ . Analog zum eindimensionalen Fall setzen wir nun

$$\int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \sum_{i=1}^N c_i \cdot V(Q_i).$$

Das Integral einer mehrdimensionalen Treppenfunktion ist somit die Summe der Volumina aller Teilquader multipliziert mit dem jeweiligen Funktionswert auf diesem Teilquader. Den Definitionsbereich der Treppenfunktion schreiben wir an das Integralzeichen, um zu kennzeichnen, dass über dieses Gebiet integriert wird.

Ausgehend von Treppenfunktionen im  $\mathbb{R}^n$  definieren wir jetzt das Integral einer beliebigen reellwertigen Funktion  $f : \mathcal{Q}^n \ni Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nähern  $f$  wieder durch Treppenfunktionen  $\alpha, \beta \in \mathcal{T}(\mathcal{Q}^n)$  mit

$\alpha(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq \beta(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in Q$  an und bilden das Infimum bzw. das Supremum derjenigen Mengen, welche alle möglichen Volumina über Treppenfunktionen beinhalten, die größer oder gleich bzw. kleiner oder gleich der zu integrierenden Funktion  $f$  sind:

$$\overline{\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} := \inf \left\{ \int_Q \beta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \mid \beta \in \mathcal{T}(Q^n) \text{ und } f \leq \beta \right\},$$

$$\underline{\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} := \sup \left\{ \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \mid \alpha \in \mathcal{T}(Q^n) \text{ und } \alpha \leq f \right\}.$$

Liefere diese beiden Grenzwertprozesse unabhängig von den Treppenfunktionen  $\alpha$  und  $\beta$  denselben Wert, so heißt  $f$  RIEMANN-integrierbar und man schreibt für diesen Wert

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

**Bemerkung:** Allgemein spricht man bei solchen Integralen von Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  von einem *Gebietsintegral*, in den Spezialfällen  $n = 2$  von einem *Doppelintegral* oder *Flächenintegral*, da über eine Fläche integriert wird (nicht zu verwechseln mit *Oberflächenintegralen*, die hier nicht behandelt werden), für  $n = 3$  von einem *Dreifachintegral* oder auch *Volumenintegral*, da über ein Volumen integriert wird. Für  $n = 1$  geht das Gebietsintegral in ein ganz normales eindimensionales Integral über.

Für Gebietsintegrale gibt es verschiedene Schreibweisen. Wir gehen jeweils von einer Integration über einen Quader  $Q$  aus. Eine Verallgemeinerung auf *Normalbereiche*, die in Abschnitt 3.2 vorgenommen wird, schlägt sich in der Notation dabei bloß durch eine entsprechende Kennzeichnung des Integrationsgebietes an Stelle des Quaders  $Q$  am Integralzeichen nieder. Für  $Q \in \mathcal{Q}^2$  sind folgende Schreibweisen üblich:

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, dA \quad \text{bzw.} \quad \iint_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \int_Q f(x_1, x_2) \, d(x_1, x_2).$$

Es soll jeweils verdeutlicht werden, dass über eine Fläche integriert wird bzw. dass es sich um ein Doppelintegral handelt bzw. dass die vorkommenden Variablen spezielle Bezeichnungen haben. Analog schreibt man für  $Q \in \mathcal{Q}^3$

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, dV \quad \text{bzw.} \quad \iiint_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \int_Q f(x_1, x_2, x_3) \, d(x_1, x_2, x_3)$$

jeweils aus ähnlichen Gründen wie im Fall  $n = 2$ . Für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  ist mit  $Q \in \mathcal{Q}^n$  auch die Notation

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d^n \mathbf{x}$$

möglich. Analog zum eindimensionalen Integral ist auch das  $n$ -dimensionale Gebietsintegral linear und monoton, d.h. für alle integrierbaren Funktionen  $f, g$  (in dieser Arbeit reicht es für integrierbare Funktionen deren Stetigkeit vorauszusetzen) und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gelten

$$\int_Q \lambda \cdot f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lambda \cdot \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \int_Q f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_Q g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

sowie

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_Q g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad , \text{ falls } f \leq g.$$

### 3 Der Satz von Fubini und die Transformationsformel

Nach der allgemeinen Definition eines Gebietsintegrals über Quadern benötigen wir nun zwei wichtige Sätze, die eine Aussage darüber treffen, wie man Gebietsintegrale explizit auszurechnen hat. Der *Satz von FUBINI* besagt, dass man ein Gebietsintegral als iteriertes Integral schreiben kann, bei welchem man Schritt für Schritt über jede Variable separat integriert und somit das mehrfache Integral auf mehrere einzelne Integrale zurückgeführt wird. Dies gilt auch für Normalbereiche (siehe Abschnitt 3.2), die allgemeinere Integrationsbereiche als die bisher betrachteten Quader darstellen. Kompliziertere Normalbereiche lassen sich dabei häufig mittels Koordinatentransformationen in einfachere Normalbereiche umschreiben, was die Integration erleichtert. Die wichtigsten dieser Transformationen werden erst in Abschnitt 4 vorgestellt, hier zeigen wir aber schon die zur Umrechnung benötigte *Transformationsformel*, eine Art verallgemeinerte Substitutionsregel.

### 3.1 Der Satz von Fubini

Wir formulieren den Satz von FUBINI zuerst für die bisher bekannten Integrationsgebiete, nämlich Quader.

#### Satz von FUBINI für Quader

Sei  $Q \in \mathcal{Q}^n$  mit  $Q = [a_1, b_1[ \times \dots \times [a_n, b_n[$  und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n.$$

**Bemerkung:** Der Satz von FUBINI besagt also, dass ein Gebietsintegral (linke Seite der Gleichung) durch ein *iteriertes Integral* (rechte Seite) berechnet werden kann, bei dem beginnend mit dem innersten Integralzeichen sukzessive für jede Variable über die zugehörige Seitenlänge des Quaders als Integrationsbereich integriert wird. Die Integrationsreihenfolge ist dabei wie bei der Schachtelung von Klammern von innen nach außen zu verstehen, ist aber im Endeffekt, sofern alle auftretenden einzelnen Integrale existieren, beliebig.

**Beweis:** Wir unterteilen den Beweis in drei Teile, in denen wir die Gültigkeit des Satzes Schritt für Schritt zuerst für eine sogenannte *charakteristische Funktion*, dann für eine Treppenfunktion und schließlich für eine allgemeine Funktion  $f$  zeigen. Dabei ist für eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  die charakteristische Funktion  $\chi_A$  dieser Menge definiert durch

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\} \quad , \quad \chi_A(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \mathbf{x} \in A \\ 0 & , \text{ falls } \mathbf{x} \notin A \end{cases} .$$

Die DIRICHLETSche Sprungfunktion aus Abschnitt 1 ist also auch eine charakteristische Funktion, nämlich die der rationalen Zahlen im Einheitsintervall  $[0, 1]$ .

**1. Schritt:** Der Satz gilt für charakteristische Funktionen.

Für  $i = 1, \dots, n$  seien  $a_i, \alpha_i, \beta_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a_i < \alpha_i < \beta_i < b_i$  und  $Q := [a_1, b_1[ \times \dots \times [a_n, b_n[ \in \mathcal{Q}^n$ . Definiere für  $i = 1, \dots, n$  den Teilquader  $Q_i \subsetneq Q$  durch

$$Q_i := [\alpha_i, \beta_i[ \times \dots \times [a_n, b_n[.$$

Für das Integral der charakteristischen Funktion  $\chi_{Q_1}$  gilt dann offensichtlich

$$\int_Q \chi_{Q_1}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = V(Q_1) = \prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i).$$

Das iterierte Integral liefert denselben Wert, denn

$$\begin{aligned} & \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \chi_{Q_1}(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \chi_{Q_1}(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \\ &= (\beta_1 - \alpha_1) \cdot \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \chi_{Q_2}(x_2, \dots, x_n) \, dx_2 \dots dx_n \\ &= (\beta_1 - \alpha_1) \cdot \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \chi_{Q_2}(x_2, \dots, x_n) \, dx_2 \dots dx_n \\ &= \dots = \prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i). \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir benutzt, dass wir statt über  $[a_1, b_1[$  auch über  $[\alpha_1, \beta_1[$  integrieren können, da  $\chi_{Q_1}$  für Punkte außerhalb des letzten Intervalls sowieso 0 ist. Auf diesem Intervall hat  $\chi_{Q_1}$  jedoch

den Wert 1, sodass wir den Faktor  $(\beta_1 - \alpha_1)$  aus dem gesamten Integral herausziehen können. Durch  $n$ -faches Anwenden dieses Arguments erhält man auch für das iterierte Integral  $V(Q_1)$  als Wert. Somit stimmen Gebietsintegral und iteriertes Integral für charakteristische Funktionen überein.

**2. Schritt:** Der Satz gilt für Treppenfunktionen.

Eine Treppenfunktion  $\alpha \in \mathcal{T}(Q^n)$  über  $Q$  lässt sich als Linearkombination von endlich vielen charakteristischen Funktionen schreiben, da für  $N \in \mathbb{N}$  und eine disjunkte Zerlegung von  $Q$  in  $N$  Teilquader  $Q_i \subseteq Q$  gilt:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N c_i \cdot \chi_{Q_i}(\mathbf{x}),$$

wobei  $c_i$  der entsprechende Funktionswert von  $\alpha$  auf dem Teilquader  $Q_i$  ist. Da Gebietsintegrale und analog auch iterierte Integrale linear sind, ist der Satz nach Schritt 1 demnach auch für Treppenfunktionen gültig.

**3. Schritt:** Der Satz gilt für beliebige integrierbare Funktionen.

Die Definition eines Gebietsintegrals lässt sich etwas umschreiben:  $f$  ist genau dann über  $Q$  integrierbar, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktion  $\alpha, \beta \in \mathcal{T}(Q^n)$  mit  $\alpha \leq f \leq \beta$  gibt, sodass

$$\int_Q \beta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

denn unterscheiden sich die Integrale zweier  $f$  einschließender Treppenfunktionen um einen beliebig kleinen Wert, so müssen aufgrund der Monotonie des Gebietsintegrals Ober- und Unterintegral gegen denselben Grenzwert, nämlich den des Integrals von  $f$ , konvergieren. Aus der Monotonie des Gebietsintegrals und aus der Monotonie des iterierten Integrals folgen ebenfalls die Ungleichungen

$$\int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_Q \beta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \tag{2}$$

und

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \alpha(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \leq \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \leq \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \beta(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n. \tag{3}$$

Unter Benutzung der Gleichheit von Gebietsintegralen und iterierten Integralen von Treppenfunktionen, die in Schritt 2 gezeigt wurde, folgt dann:

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \right| \\ &= \left| \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \right| \\ &= \left| \left( \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) - \left( \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n - \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right|}_{\substack{(2) \\ \geq 0}} \\ &\quad + \underbrace{\left| \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n - \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \alpha(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \right|}_{\substack{(3) \\ \geq 0}} \\ &\stackrel{(2),(3)}{\leq} \int_Q \beta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \beta(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n - \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= 2 \left( \int_Q \beta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_Q \alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \stackrel{(1)}{<} \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $\varepsilon > 0$ . Daraus ergibt sich, dass Gebietsintegral und iteriertes Integral denselben Wert ergeben und die Gültigkeit des Satzes ist für beliebige integrierbare Funktionen  $f$  gezeigt.  $\square$

### 3.2 Normalbereiche

Die Integration über einen Quader lässt sich ausdehnen zu einer Integration über Bereiche, die zwar eine viele komplizierte Erscheinungsform als Quader haben können, sich aber dennoch relativ einfach beschreiben lassen. Dies ist auch notwendig, da sehr häufig die Integrationsbereiche nicht die bequeme Form eines Rechtecks oder Würfels haben. Im Eindimensionalen hatte man damit keine Probleme, da Intervalle eine nicht sehr große Vielfalt an Erscheinungsformen mit sich bringen. Aber schon im Zweidimensionalen kann der Integrationsbereich schnell komplizierter aussehen, zum Beispiel ein Kreis, ein Parallelogramm oder eine ganz allgemeine geometrische Figur. Entsprechendes gilt für höherdimensionale Bereiche.

Eine Möglichkeit dabei ist, die über einer beliebigen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  zu integrierende Funktion  $f$  zu einer ebenfalls integrierbaren Funktion  $\tilde{f}$  auf einen Quader  $Q \subseteq \mathbb{Q}^n$  fortzusetzen, der die Menge  $D$  umschließt, also  $D \subseteq Q$ . Die Funktion  $\tilde{f}$  hat dann die Gestalt

$$\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & , \text{ falls } \mathbf{x} \in D \\ 0 & , \text{ falls } \mathbf{x} \in Q \setminus D \end{cases} .$$

In vielen praktisch vorkommenden Fällen lassen sich aber die Ränder der Menge  $D$  durch Funktionen  $g_j, h_j : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $j = 1, \dots, n-1$  darstellen, d.h. bei festen  $x_1, \dots, x_{n-1}$  gibt es ein Intervall  $I$  und Funktionen  $g_j, h_j$ , sodass

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \left| x_1 \in I, g_1(x_1) \leq x_2 \leq h_1(x_1), \dots, g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq h_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \right. \right\} .$$

Findet man eine Darstellung von  $D$  in dieser Form, so heißt  $D$  ein *Normalbereich*. Bei der Berechnung des iterierten Integrals der Funktion  $f$  sind alle Integrationsgrenzen also nun ihrerseits Funktionen der noch nicht integrierten Variablen, weswegen die Reihenfolge der Integration nicht mehr vertauscht werden darf. Der Satz von FUBINI gilt aber weiterhin, er lautet nun:

#### Satz von FUBINI für Normalbereiche

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Normalbereich wie oben und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_I \int_{g_1(x_1)}^{h_1(x_1)} \dots \int_{g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \dots dx_2 dx_1 .$$

### 3.3 Die Transformationsformel

Nach dem Satz von FUBINI kommen wir nun zu einer weiteren sehr wichtigen Formel, die das Berechnen von Gebietsintegralen über sehr allgemeine Integrationsbereiche erlaubt und eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(u))g'(u) \, du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx$$

vom ein- auf den mehrdimensionalen Fall darstellt. Dazu benötigen wir den Begriff der *Transformation*. Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Normalbereich, so heißt eine Abbildung  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  *Transformation* oder  *$C^1$ -Diffeomorphismus*, falls sie eine stetig differenzierbare Bijektion ist, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig differenzierbar ist. Weiter gelte entweder  $\det \mathbf{J}_T(\mathbf{x}) > 0$  oder  $\det \mathbf{J}_T(\mathbf{x}) < 0$  für fast alle  $\mathbf{x} \in D$ , wobei  $\mathbf{J}_T(\mathbf{x})$  die JACOBI-Matrix, also die Ableitung der Transformation  $T$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  sei.

Eine Transformation bewirkt einen Wechsel in ein anderes Koordinatensystem und bildet die Menge  $D$  im ursprünglichen Koordinatensystem auf die entsprechende Menge  $T(D)$  im Koordinatensystem der Transformation  $T$  ab. Zum Beispiel werden im kartesischen Koordinatensystem die Koordinatenlinien, also die Mengen der Form

$$C_k := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D \left| x_k = c \right. \right\}$$

für  $k = 1, \dots, n$  und einer festen Zahl  $c \in \mathbb{R}$  (für  $c = 0$  ergeben sich die Koordinatenachsen) unter der Transformation  $T$  auf *krummlinige* Koordinatenlinien abgebildet. Da eine Transformation injektiv ist, wird jeder Punkt  $\mathbf{x} \in D$  eindeutig auf einen Punkt in den krummlinigen Koordinaten abgebildet. Ebenfalls wird wegen der Surjektivität von  $T$  jeder Punkt des neuen Koordinatensystems berücksichtigt. Die stetige Differenzierbarkeit sorgt dafür, dass die neuen Koordinatenlinien wieder glatte Kurven sind und unter  $T$  bloß leicht verzerrt werden. Außerdem soll das Vorzeichen der Funktionaldeterminante konstant bleiben, damit die Koordinatenlinien in  $T(D)$  alle gleich orientiert sind.

Damit kommen wir nun zur Transformationsformel, die wir aber nicht vollständig beweisen, da ein exakter Beweis für RIEMANN-Integrale, wie sie hier behandelt werden, schwer zu formulieren ist. Da die Mittel der Maßtheorie und das LEBESGUE-Integral nicht zur Verfügung stehen, beschränken wir uns auf eine anschauliche Darstellung der Herleitung.

### Transformationsformel

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Normalbereich und  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Transformation. Dann ist eine Funktion  $f : T(D) \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann über  $T(D)$  integrierbar, wenn die Funktion  $(f \circ T) \cdot |\det \mathbf{J}_T| : D \rightarrow \mathbb{R}$  über  $D$  integrierbar ist, und es gilt:

$$\int_{T(D)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f(T(\mathbf{u})) \cdot |\det \mathbf{J}_T| \, d\mathbf{u}.$$

Ähnlich zum Beweis des Satzes von FUBINI geht man auch hier schrittweise von speziellen zu allgemeinen Fällen vor. Man beginnt mit einer *affin-linearen* Abbildung der Form

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_T \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

mit der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_T$  der Transformation und einem festen Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Ist  $Q \subseteq \mathcal{Q}^n$  ein Quader, so wird dieser unter  $T$  auf ein *Parallelepiped* abgebildet, welches von den linear unabhängigen Spalten der Matrix  $\mathbf{J}_T$  aufgespannt wird. Die Spalten müssen linear unabhängig sein, da sonst das Volumen des Parallelepipeds 0 wäre und  $\det \mathbf{J}_T$  verschwinden würde, was der Definition einer Transformation widerspricht. Nach Ergebnissen aus der Linearen Algebra ist das Volumen dieses Parallelepipeds aber gerade gleich  $|\det \mathbf{J}_T| \cdot V(Q)$ ; bezeichnen also  $V(Q)$  und  $V(T(Q))$  das Volumen des ursprünglichen und des transformierten Quaders, so gilt

$$V(T(Q)) = |\det \mathbf{J}_T| \cdot V(Q).$$

Der Betrag der Funktionaldeterminante ist also ein Maß für die Verzerrung eines quaderförmigen Volumenelements unter der Transformation  $T$ .

Ist  $D$  ein Normalbereich, so können wir diesen durch eine Zerlegung in endlich viele disjunkte Quader  $Q_i \subseteq \mathcal{Q}^n$  annähern und jeden einzelnen dieser Quader unter der Transformation  $T$  betrachten. Für eine über  $T(D)$  integrierbare Funktion  $f$  und großes  $N \in \mathbb{N}$  gilt dann:

$$I := \int_{T(D)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) \cdot V(T(Q_i)) \quad (4)$$

mit beliebigen  $\mathbf{x}_i \in T(Q_i)$ . Wie oben beschrieben, gilt nun für jeden transformierten Quader  $T(Q_i)$  der Zerlegung  $V(T(Q_i)) = |\det \mathbf{J}_T| \cdot V(Q_i)$ . Weiterhin finden wir aufgrund der Surjektivität von  $T$  ein  $\mathbf{u}_i \in Q_i$  mit  $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{x}_i$ . Damit erhalten wir:

$$I \approx \sum_{i=1}^N f(T(\mathbf{u}_i)) \cdot |\det \mathbf{J}_T| \cdot V(Q_i). \quad (5)$$

Vergrößert man den Grad der Zerlegung und lässt den größten Durchmesser aller Teilquader  $Q_i$  gegen 0 gehen, so konvergiert sowohl die Summe (4) als auch, wegen der Stetigkeit der Transformation  $T$ , die Summe (5) gegen  $I$ . Hierbei ist es notwendig, den größten Durchmesser gegen 0 gehen zu lassen, da alle Seiten der Quader gleichmäßig gegen 0 gehen sollen. Wird nur eine Seite 0, so zwar auch das Gesamtvolumen, aber es ist nicht sichergestellt, dass die Zerlegung feiner wird. Nur in diesem Grenzfalle haben wir dann die Aussage der Transformationsformel, dass

$$\int_{T(D)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f(T(\mathbf{u})) \cdot |\det \mathbf{J}_T| \, d\mathbf{u}.$$

Betrachten wir eine allgemeine, nicht unbedingt affin-lineare Transformation, so können wir diese jedoch lokal durch eine Linearisierung wiederum in Form einer affin-linearen Abbildung annähern und mit deren Verhalten die ursprüngliche Transformation in einem kleinen Bereich ihres Definitionsbereichs beschreiben. Die obigen Argumente lassen sich dann auf diesen Fall übertragen, sodass die Formel auch für solche Transformationen gültig ist.

## 4 Wichtige Koordinatentransformationen

Nach dem eher theoretischen Teil kommen wir nun zu den praktischeren und auch anwendungsorientierten Aspekten von Gebietsintegralen. Zuerst nutzen wir die Transformationsformel aus Abschnitt 3.3 und stellen drei der gängigsten Koordinatentransformationen vor: *Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten*. Durch Transformation von Gebietsintegralen auf durch diese Koordinatensysteme beschreibbare Integrationsgebiete erleichtern sich sehr viele Rechnungen stark, wie wir in Abschnitt 5 sehen werden.

### 4.1 Polarkoordinaten

*Polarkoordinaten* sind schon von der alternativen Darstellung der komplexen Zahlen her vertraut. Dort war die Idee, eine komplexe Zahl nicht nur durch ihren Real- und Imaginärteil, sondern auch durch ihren Betrag und ihr Argument darzustellen. Ähnlich gehen wir bei einer anderen Beschreibung eines zweidimensionalen Normalbereichs  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  vor: Wir charakterisieren einen Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in D$  nicht mehr nur durch die  $x_1$ - und die  $x_2$ -Koordinate, sondern auch durch seinen Abstand vom Ursprung  $\mathbf{0}$  und durch den Winkel  $\varphi$ , den die Verbindungslinie zwischen Ursprung und Punkt mit der positiven  $x_1$ -Achse einschließt. Die beiden Koordinaten des Punktes  $\mathbf{x}$  lassen sich folgendermaßen durch diese beiden Größen ausdrücken:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad , \quad x_2 = r \sin \varphi$$

mit  $r > 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Die Transformation auf Polarkoordinaten ist also gegeben durch die Abbildung

$$\Psi : [0, \infty[ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \Psi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Um die Transformationsformel aber anwenden zu können, benötigen wir den Absolutbetrag der Funktionaldeterminante  $|\det \mathbf{J}_\Psi|$ . Dieser ergibt sich zu

$$|\det \mathbf{J}_\Psi| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = |r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi| = |r| = r,$$

da  $r > 0$ .

#### Integration mittels Polarkoordinaten

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich,  $\Psi$  die Transformation auf Polarkoordinaten und  $\Psi(D)$  die Beschreibung von  $D$  durch Polarkoordinaten. Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so gilt:

$$\int_D f(x_1, x_2) \, d(x_1, x_2) = \int_{\Psi(D)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, d(r, \varphi).$$

### 4.2 Zylinderkoordinaten

Als nächstes betrachten wir räumliche Koordinatentransformationen, d.h. wir setzen  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  voraus. Die erste Transformation dieser Art ist die auf *Zylinderkoordinaten*.

Zylinderkoordinaten erweitern die ebenen Polarkoordinaten um eine dritte Achse, die  $z$ -Achse. Wiederum ist  $\rho$  der Abstand des Punktes  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in D$  vom Ursprung  $\mathbf{0}$ ,  $\varphi$  der Winkel, der von der Projektion des Lots des Punktes  $\mathbf{x}$  auf die  $x_3$ -Achse auf die  $x_1x_2$ -Grundebene und der positiven  $x_1$ -Achse eingeschlossen wird, und  $z$  die Richtung entlang der  $x_3$ -Achse. Man erhält dann die Darstellung

$$x_1 = \rho \cos \varphi \quad , \quad x_2 = \rho \sin \varphi \quad , \quad x_3 = z$$

mit  $\rho > 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Die Transformation auf Zylinderkoordinaten ist also gegeben durch die Abbildung

$$\Theta : [0, \infty[ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \Theta \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Der Betrag der Funktionaldeterminante berechnet sich ähnlich zu den Polarkoordinaten zu

$$|\det \mathbf{J}_\Theta| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = |\rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi| = |\rho| = \rho,$$

da  $\rho > 0$ .

**Integration mittels Zylinderkoordinaten**

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Normalbereich,  $\Theta$  die Transformation auf Zylinderkoordinaten und  $\Theta(D)$  die Beschreibung von  $D$  durch Zylinderkoordinaten. Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so gilt:

$$\int_D f(x_1, x_2, x_3) \, d(x_1, x_2, x_3) = \int_{\Theta(D)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho \, d(\rho, \varphi, z).$$

**4.3 Kugelkoordinaten**

Zuletzt betrachten wir noch die *Kugelkoordinaten*. Sie sind ähnlich der Darstellung eines Punktes auf der Erdoberfläche in der Geographie; dort benötigt man zur Angabe zwei Winkel: die geographische Länge  $\varphi$  und die geographische Breite  $\vartheta$ . Daher benötigt man zur Darstellung eines Punktes  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in D$  im Raum zwei Winkel, die wir ebenfalls  $\varphi$  und  $\vartheta$  nennen. Die Festlegung von  $\varphi$  erfolgt analog zu den Zylinderkoordinaten,  $\vartheta$  legen wir als den Winkel zwischen der Verbindungslinie zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{0}$  und der  $x_3$ -Achse fest. Halten wir den Winkel  $\varphi$  fest, können wir die Größen  $\rho$  und  $z$ , die bei den Zylinderkoordinaten auftraten, durch den Abstand  $r$  vom Ursprung und  $\vartheta$  ausdrücken:

$$\rho = r \sin \vartheta \quad , \quad z = r \cos \vartheta$$

mit  $r > 0$  und  $\vartheta \in [0, \pi]$ . Einsetzen in die schon bestehenden Beziehungen der Zylinderkoordinaten führt zur Transformation auf Kugelkoordinaten, die gegeben ist durch die Abbildung

$$\Phi : [0, \infty[ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Mit etwas mehr Aufwand als vorhin folgt für den Betrag der Funktionaldeterminante:

$$\begin{aligned} |\det \mathbf{J}_\Phi| &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \cos \vartheta \cdot \det \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \end{pmatrix} - r \sin \vartheta \cdot \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \cos \vartheta (-r^2 \sin^2 \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta - r^2 \cos^2 \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta) - r \sin \vartheta (r \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta) \right| \\ &= \left| -r^2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - r^2 \sin^3 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \right| \\ &= \left| -r^2 \sin \vartheta (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \right| \\ &= r^2 \sin \vartheta, \end{aligned}$$

da  $r > 0$  und  $\sin \vartheta > 0$  für  $\vartheta \in [0, \pi]$ .

**Integration mittels Kugelkoordinaten**

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Normalbereich,  $\Phi$  die Transformation auf Kugelkoordinaten und  $\Phi(D)$  die Beschreibung von  $D$  durch Kugelkoordinaten. Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so gilt:

$$\int_D f(x_1, x_2, x_3) \, d(x_1, x_2, x_3) = \int_{\Phi(D)} f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) \cdot r^2 \sin \vartheta \, d(r, \varphi, \vartheta).$$

**Bemerkung:** Die beiden vorgestellten Koordinatentransformationen für dreidimensionale Integrationsbereiche erhalten ihre Namen durch ihr Aussehen bei konstantem Abstand des transformierten Punktes  $(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)^\top \in \Theta(D)$  bei den Zylinder- bzw.  $(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)^\top \in \Phi(D)$  bei den Kugelkoordinaten vom Ursprung. Variiert man jeweils  $\varphi$  und  $z$  bzw.  $\varphi$  und  $\vartheta$ , so erhält man eine Zylinder- bzw. Kugeloberfläche im  $\mathbb{R}^3$ .

**5 Beispiele**

Wir greifen nun alles Bisherige auf und rechnen einige Gebietsintegrale aus. Als erstes soll das Gebietsintegral

$$I_1 := \int_D \frac{\sin(x_1 + x_3)}{x_2 + 2} \, d\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad D := \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \times [0, 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

berechnet werden. Wir schreiben das Gebietsintegral mit dem Satz von FUBINI als iteriertes Integral. Dies ist möglich, da der Integrand eine auf  $D$  stetige, also insbesondere integrierbare Funktion ist. Außerdem können wir das Integral als ein Produkt von zwei Integralen schreiben, da wir ein Produkt aus einer Funktion in  $x_1$  und  $x_3$  und einer Funktion nur in  $x_2$  haben. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin(x_1 + x_3)}{x_2 + 2} dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= \left( \int_0^2 \frac{dx_2}{x_2 + 2} \right) \cdot \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin(x_1 + x_3) dx_1 dx_3 \right) \\
 &= \left( \left[ \ln(x_2 + 2) \right]_{x_2=0}^2 \right) \cdot \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\cos(x_1 + x_3) \right]_{x_1=-\frac{\pi}{4}}^0 dx_3 \right) \\
 &= \ln 2 \cdot \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x_3 - \frac{\pi}{4}\right) - \cos x_3 dx_3 \right) \\
 &= \ln 2 \cdot \left( \left[ \sin\left(x_3 - \frac{\pi}{4}\right) - \sin x_3 \right]_{x_3=0}^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \ln 2 \cdot \left( \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin 0 \right) \\
 &= \ln 2 \cdot (\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt, vereinfachen Koordinatentransformationen viele Berechnungen erheblich. Durch Polarkoordinaten können wir zum Beispiel auch das GAUSS-Integral

$$I_2 := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

ganz einfach ausrechnen. Berechnet man zuerst  $I_2^2$  zu

$$\begin{aligned}
 I_2^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b r e^{-r^2} dr = 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^b \\
 &= \pi,
 \end{aligned}$$

so folgt durch Wurzelziehen sofort

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Als eindimensionales Integral kann man das GAUSS-Integral nur numerisch auswerten, mit Gebietsintegralen und Polarkoordinaten erhält man den exakten Wert ohne großen Aufwand.

Wir demonstrieren die Nützlichkeit von Koordinatentransformationen an einem weiteren Beispiel: Wir wollen die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

über der Kugelschale  $K$  mit innerem Radius  $\frac{1}{2}$  und äußerem Radius 1 integrieren. In kartesischen Koordinaten wird sowohl die korrekte Beschreibung des Integrationsgebietes im iterierten Integral als auch die Integration selbst bedingt durch den Integranden sehr mühsam. Eine Kugelschale als Integrationsgebiet fordert aber praktisch schon automatisch die Transformation auf Kugelkoordinaten. Die Kugelschale verwandelt sich dann in das Gebiet

$$\Phi(K) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi] \right\}.$$

Auch der Integrand vereinfacht sich und man erhält:

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_K f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{\Phi(K)} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin \vartheta \, d(r, \varphi, \vartheta) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta dr \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 r \left[ -\cos \vartheta \right]_{\vartheta=0}^\pi dr = 4\pi \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{r=\frac{1}{2}}^1 = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Transformationsformel nicht nur bei den in Abschnitt 4 vorgestellten und am häufigsten auftretenden Koordinatentransformationen verwendet werden kann, sondern auch bei anderen Transformationen sehr hilfreich ist. Wir berechnen dazu das Integral

$$I_4 := \int_M \frac{4(x_1 + x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} \, d\mathbf{x}$$

über der Menge

$$M := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} < 1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} < \frac{1}{2} \right\}$$

mit Hilfe der Transformation, die gegeben ist durch

$$x_1 = \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2}.$$

Dazu berechnen wir zuerst folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \frac{u_1^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} + \frac{u_2^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2}, \\ \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} &= \frac{\frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2}}{\frac{1}{u_1^2 + u_2^2}} = u_1, \quad \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2}}{\frac{1}{u_1^2 + u_2^2}} = u_2, \quad x_1 + x_2 = \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} + \frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{u_1 + u_2}{u_1^2 + u_2^2}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} &= \frac{1 \cdot (u_1^2 + u_2^2) - u_1 \cdot 2u_1}{(u_1^2 + u_2^2)^2} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = \frac{1 \cdot (u_1^2 + u_2^2) - u_2 \cdot 2u_2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_2} = \frac{u_1 \cdot (-2u_2)}{(u_1^2 + u_2^2)^2} = \frac{-2u_1 u_2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} = \frac{\partial x_2}{\partial u_1}$$

nach dem Satz von SCHWARZ. Bezeichnet  $\Omega$  die oben definierte Transformation, so verwandelt sich  $M$  in das Gebiet

$$\Omega(M) = \left\{ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u_2 < 1 - u_1 < \frac{1}{2} \right\},$$

woraus  $0 < u_2 < 1 - u_1$  sowie

$$0 < 1 - u_1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 > u_1 - 1 > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 > u_1 > \frac{1}{2}$$

folgt. Weiter ist

$$\begin{aligned} |\det \mathbf{J}_\Omega| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_2} - \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \right| = \left| \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot (u_1^2 - u_2^2)}{(u_1^2 + u_2^2)^4} - \frac{(-2u_1 u_2)^2}{(u_1^2 + u_2^2)^4} \right| \\ &= \left| \frac{u_1^2 u_2^2 - u_2^4 - u_1^4 + u_1^2 u_2^2 - 4u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 + u_2^2)^4} \right| = \left| \frac{-(u_1^2 + u_2^2)^2}{(u_1^2 + u_2^2)^4} \right| = \frac{1}{(u_1^2 + u_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir alles, was wir zur Berechnung von  $I_4$  benötigen und es folgt:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u_1} \frac{4 \frac{u_1 + u_2}{u_1^2 + u_2^2}}{\left( \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \right)^3} \cdot \frac{1}{(u_1^2 + u_2^2)^2} \, du_2 du_1 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u_1} u_1 + u_2 \, du_2 du_1 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ u_1 u_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right]_{u_2=0}^{1-u_1} du_1 \\ &= 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 u_1(1-u_1) + \frac{1}{2}(1-u_1)^2 \, du_1 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 u_1 - u_1^2 + \frac{1}{2} - u_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \, du_1 = -2 \int_{\frac{1}{2}}^1 u_1^2 - 1 \, du_1 \\ &= -2 \left[ \frac{1}{3} u_1^3 - u_1 \right]_{u_1=\frac{1}{2}}^1 = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

## 6 Physikalische Anwendungen

Genau wie eindimensionale Integrale haben mehrdimensionale Integrale eine große Bedeutung in den Anwendungen, insbesondere der Physik. Viele physikalische Größen lassen sich mit Integralen ausdrücken und da Gebietsintegrale insbesondere zwei- oder auch dreidimensionale Integrationsgebiete zulassen, eröffnen sich neue Möglichkeiten. Wir wollen ein paar dieser durch Gebietsintegrale gegebenen Größen vorstellen, wobei prinzipiell  $n$ -dimensionale Körper zugelassen sind, auch wenn man für  $n > 3$  eigentlich nur sehr schwer von einem Schwerpunkt oder Trägheitsmoment sprechen kann. Wir illustrieren daher die hergeleiteten Formeln durchweg an einem konkreten 3-dimensionalen Beispiel.

### 6.1 Volumen

Ein eindimensionales Integral liefert die Fläche unter dem Graphen einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  über einem kompakten Intervall  $[a, b]$ . Die Verallgemeinerung im Mehrdimensionalen ist das Volumen unter dem Graphen einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  über einem Normalbereich  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , welches ein  $(n + 1)$ -dimensionales Volumen ist.

Sei also  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Normalbereich und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Funktion. Die Funktion  $f$  soll nur nicht-negative Werte annehmen, da sonst beim Volumen, ähnlich wie bei der Bestimmung von Flächeninhalten mit eindimensionalen Integralen, manche Bereiche negativ gezählt werden könnten und das Integral somit nicht den Absolutbetrag des Volumens liefern würde. Wir definieren dann die Menge

$$D_* := \left\{ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in D, 0 \leq y \leq f(\mathbf{x}) \right\}.$$

$D_*$  ist also auch ein Normalbereich und stellt gerade den Bereich unter dem Graphen von  $f$  dar. Integrieren wir nun die Funktion  $f$  über  $D$ , so erhalten wir das Volumen von  $D_*$ :

$$V(D_*) = \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D (f(\mathbf{x}) - 0) \, d\mathbf{x} = \int_D \int_0^{f(\mathbf{x})} 1 \, dy \, d\mathbf{x} = \int_{D_*} dz.$$

Im zweiten Schritt fügen wir eine 0 ein, um im dritten Schritt den Integranden vermeintlich komplizierter seinerseits wieder als Integral über  $y$  zu schreiben. Dadurch bekommen wir aber erst ein Integral über  $D_*$  und eine im Endeffekt viel einfachere Formel.

#### Volumen eines Körpers

Ist  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Körper, der als Normalbereich beschrieben werden kann, so gilt für das  $n$ -dimensionale Volumen  $V$  dieses Körpers:

$$V = \int_K d\mathbf{x}.$$

**Beispiel:** Seien  $a, b, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0, b \neq 0$  und  $0 \leq r_1 < r_2$ . Sei  $\mathcal{K}$  der Körper, der entsteht, wenn wir den Hohlzylinder mit innerem Radius  $r_1$  und äußerem Radius  $r_2$  mit der  $x_1x_2$ -Grundebene und der Fläche  $x_3 = ae^{b(x_1^2+x_2^2)}$  schneiden, d.h.

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid r_1^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq r_2^2 \text{ und } 0 \leq x_3 \leq ae^{b(x_1^2+x_2^2)} \right\}.$$

Dann folgt unter Benutzung von Zylinderkoordinaten für das Volumen:

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{K}} &= \int_{\mathcal{K}} d\mathbf{x} = \int_{\Theta(\mathcal{K})} \rho \, d(\rho, \varphi, z) = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} \rho \, d\varphi \, dz \, d\rho = 2a\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho e^{b\rho^2} \, d\rho \\ &= 2a\pi \left[ \frac{1}{2b} e^{b\rho^2} \right]_{\rho=r_1}^{r_2} = \frac{a\pi}{b} \left( e^{br_2^2} - e^{br_1^2} \right). \end{aligned}$$

### 6.2 Masse

Wir können das Ergebnis aus Abschnitt 6.1 noch weiter benutzen, um auch die Masse eines Körpers  $K$  als Gebietsintegral zu schreiben. Die Masse eines Körpers ergibt sich aus seinem Volumen multipliziert

mit seiner Dichte, d.h.

$$m = \varrho \cdot \int_K d\mathbf{x}.$$

Ist der Körper homogen und damit die Dichte konstant, ist sie ein einfacher Faktor vor dem Integral; ist der Körper inhomogen, d.h. die Dichte ist variabel und hängt von den Integrationsvariablen ab, so müssen wir die *Dichteverteilungsfunktion*  $\varrho : K \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  über dem Körper  $K$  selbst integrieren.

### Masse eines Körpers

Ist  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Körper, der als Normalbereich beschrieben werden kann, und  $\varrho : K \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  eine integrierbare Funktion, die die Dichteverteilung des Körpers beschreibt, so gilt für die Masse  $m$  dieses Körpers:

$$m = \int_K \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

**Beispiel:** Wir betrachten wieder den Körper aus dem Beispiel in Abschnitt 6.1 und berechnen seine Masse, wenn die Dichteverteilung innerhalb des Körpers durch die Funktion

$$\varrho_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) := x_2^2.$$

gegeben ist. Wieder dienen Zylinderkoordinaten zur Vereinfachung:

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{K}} &= \int_{\mathcal{K}} x_2^2 d\mathbf{x} = \int_{\Theta(\mathcal{K})} (\rho \sin \varphi)^2 \cdot \rho d(\rho, \varphi, z) = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \rho^3 \sin^2 \varphi dz d\varphi d\rho \\ &= a \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \rho^3 e^{b\rho^2} \sin^2 \varphi d\varphi d\rho = a \underbrace{\left( \left[ \frac{1}{2}(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \right)}_{=\pi} \left( \left[ \frac{1}{2b} e^{b\rho^2} \left( \rho^2 - \frac{1}{b} \right) \right]_{\rho=r_1}^{r_2} \right) \\ &= \frac{a\pi}{2b} \left( e^{br_2^2} \left( r_2^2 - \frac{1}{b} \right) - e^{br_1^2} \left( r_1^2 - \frac{1}{b} \right) \right). \end{aligned}$$

### 6.3 Schwerpunkt

Der Schwerpunkt  $\mathbf{s}$  eines (starren) Körpers  $K$  ist definiert als derjenige Punkt des Körpers, in dem sich alle Drehmomente gerade aufheben, d.h. es muss die Bedingung

$$\sum \mathbf{M} = \sum \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{s}) = 0$$

erfüllt sein, falls stets  $\mathbf{F} \perp (\mathbf{x} - \mathbf{s})$  gilt, also alle angreifenden Kräfte in jedem Punkt stets senkrecht zur Verbindungslinie zum Schwerpunkt wirken. Dividiert man durch die Gravitationsbeschleunigung  $g$ , geht zu einer kontinuierlichen Massenverteilung mit der Dichtefunktion  $\varrho$  über und benutzt die Ergebnisse aus den Abschnitten 6.1 und 6.2, so erhält man:

$$\sum m \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{s}) = 0 \Rightarrow 0 = \left( \int_K \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{s}) = \int_K (\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Durch Umformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{s} \cdot \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_K \mathbf{x} \cdot \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \Leftrightarrow \mathbf{s} \cdot m &= \int_K \mathbf{x} \cdot \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \Leftrightarrow \mathbf{s} &= \frac{1}{m} \int_K \mathbf{x} \cdot \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dabei ist das Integral des Vektors auf der rechten Seite komponentenweise zu verstehen.

### Schwerpunkt eines Körpers

Ist  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Körper, der als Normalbereich beschrieben werden kann,  $\varrho$  die Dichtefunktion des Körpers und  $m$  seine Masse, so gilt für die  $i$ -te Koordinate seines Schwerpunkts  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)^\top$ :

$$s_i = \frac{1}{m} \int_K x_i \cdot \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

**Beispiel:** Wir bestimmen den Schwerpunkt des Körpers aus dem Beispiel in Abschnitt 6.1. Dazu müssen wir die folgenden drei Gebietsintegrale ausrechnen:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} \rho \cos \varphi \cdot (\rho \sin \varphi)^2 \cdot \rho \, d\varphi dz d\rho = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} \rho^4 \cos \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi dz d\rho \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \rho^4 \underbrace{\left[ \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{2\pi}}_{=0} dz d\rho = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} \rho \sin \varphi \cdot (\rho \sin \varphi)^2 \cdot \rho \, d\varphi dz d\rho = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin^3 \varphi \, d\varphi dz d\rho \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \rho^4 \underbrace{\left[ -\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi}}_{=0} dz d\rho = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} z \cdot (\rho \sin \varphi)^2 \cdot \rho \, d\varphi dz d\rho = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} \rho^3 z \sin^2 \varphi \, d\varphi dz d\rho \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \rho^3 \left( \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{ae^{b\rho^2}} \right) \underbrace{\left( \left[ \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \right)}_{=\pi} d\rho = \frac{a^2 \pi}{2} \int_{r_1}^{r_2} \rho^3 e^{2b\rho^2} d\rho \\ &= \frac{a^2 \pi}{2} \left[ \frac{1}{4b} e^{2b\rho^2} \left( \rho^2 - \frac{1}{2b} \right) \right]_{\rho=r_1}^{r_2} = \frac{a^2 \pi}{8b} \left( e^{2br_2^2} \left( r_2^2 - \frac{1}{2b} \right) - e^{2br_1^2} \left( r_1^2 - \frac{1}{2b} \right) \right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Schwerpunkt zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathcal{K}} &= \left( \frac{I_1}{m_{\mathcal{K}}}, \frac{I_2}{m_{\mathcal{K}}}, \frac{I_3}{m_{\mathcal{K}}} \right)^{\top} = \left( \frac{0}{m_{\mathcal{K}}}, \frac{0}{m_{\mathcal{K}}}, \frac{\frac{a^2 \pi}{8b} \left( e^{2br_2^2} \left( r_2^2 - \frac{1}{2b} \right) - e^{2br_1^2} \left( r_1^2 - \frac{1}{2b} \right) \right)}{\frac{a\pi}{2b} \left( e^{br_2^2} \left( r_2^2 - \frac{1}{b} \right) - e^{br_1^2} \left( r_1^2 - \frac{1}{b} \right) \right)} \right)^{\top} \\ &= \left( 0, 0, \frac{a e^{2br_2^2} \left( r_2^2 - \frac{1}{2b} \right) - e^{2br_1^2} \left( r_1^2 - \frac{1}{2b} \right)}{4 \left( e^{br_2^2} \left( r_2^2 - \frac{1}{b} \right) - e^{br_1^2} \left( r_1^2 - \frac{1}{b} \right) \right)} \right)^{\top}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Die Integrale  $I_1$  und  $I_2$  müssen in diesem Beispiel nicht ausführlich berechnet werden, denn da der Körper rotationssymmetrisch zur  $x_3$ -Achse ist, sind die ersten beiden Koordinaten des Schwerpunkts aus Symmetriegründen sowieso gleich 0.

## 6.4 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment  $J$  eines (starren, rotationssymmetrischen) Körpers ist definiert als  $J = mr^2$ , wobei  $m$  die Masse des Körpers und  $r$  der Abstand zur Rotationsachse ist. Nimmt man eine Rotation um die  $j$ -te Koordinatenachse an, so ist

$$r^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_i^2.$$

Nach Abschnitt 6.2 ist die Masse das Integral über die Dichtefunktion und man erhält:

**Trägheitsmoment eines Körpers**

Ist  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Körper, der als Normalbereich beschrieben werden kann, und  $\varrho$  die Dichtefunktion des Körpers, so gilt für das Trägheitsmoment bei Rotation um die  $j$ -te Koordinatenachse:

$$J = \int_K \varrho(\mathbf{x}) \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_i^2 d\mathbf{x}.$$

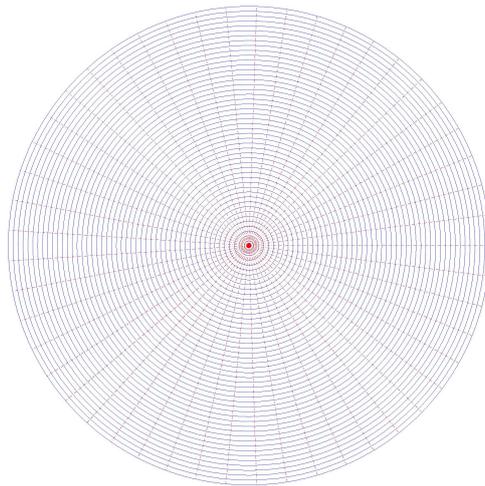
**Beispiel:** Zum Schluss bestimmen wir das Trägheitsmoment des schon bekannten Körpers aus Abschnitt 6.1. Dieser ist, wie oben schon erwähnt, rotationssymmetrisch zur  $x_3$ -Achse, sodass für das Trägheitsmoment bei Rotation um diese Achse gilt:

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{K}, x_3} &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} x_2^2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) \rho d\varphi dz d\rho = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} (\rho \sin \varphi)^2 \cdot \rho^2 \cdot \rho d\varphi dz d\rho \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{ae^{b\rho^2}} \int_0^{2\pi} \rho^5 \sin^2 \varphi d\varphi dz d\rho = \underbrace{\left( \left[ \frac{1}{2}(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \right)}_{=\pi} \cdot \left( a \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 \cdot \rho^3 e^{b\rho^2} d\rho \right) \\ &= a\pi \left( \left[ \rho^2 \cdot \frac{1}{2b} e^{b\rho^2} \left( \rho^2 - \frac{1}{b} \right) \right]_{\rho=r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} 2\rho \cdot \frac{1}{2b} e^{b\rho^2} \left( \rho^2 - \frac{1}{b} \right) d\rho \right) \\ &= a\pi \left( \frac{1}{2b} \left[ \rho^2 e^{b\rho^2} \left( \rho^2 - \frac{1}{b} \right) \right]_{\rho=r_1}^{r_2} - \frac{1}{b} \int_{r_1}^{r_2} \rho^3 e^{b\rho^2} - \frac{\rho}{b} e^{b\rho^2} d\rho \right) \\ &= a\pi \left( \frac{1}{2b} \left[ \rho^2 e^{b\rho^2} \left( \rho^2 - \frac{1}{b} \right) \right]_{\rho=r_1}^{r_2} - \frac{1}{b} \left[ \frac{1}{2b} e^{b\rho^2} \left( \rho^2 - \frac{1}{b} \right) - \frac{1}{2b^2} e^{b\rho^2} \right]_{\rho=r_1}^{r_2} \right) \\ &= \frac{a\pi}{2b} \left[ \rho^2 e^{b\rho^2} \left( \rho^2 - \frac{1}{b} \right) - \frac{1}{b} e^{b\rho^2} \left( \rho^2 - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b^2} e^{b\rho^2} \right]_{\rho=r_1}^{r_2} \\ &= \frac{a\pi}{2b} \left[ e^{b\rho^2} \left( \left( \rho^2 - \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \right) \right]_{\rho=r_1}^{r_2} \\ &= \frac{a\pi}{2b} \left( e^{br_2^2} \left( \left( r_2^2 - \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \right) - e^{br_1^2} \left( \left( r_1^2 - \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \right) \right). \end{aligned}$$

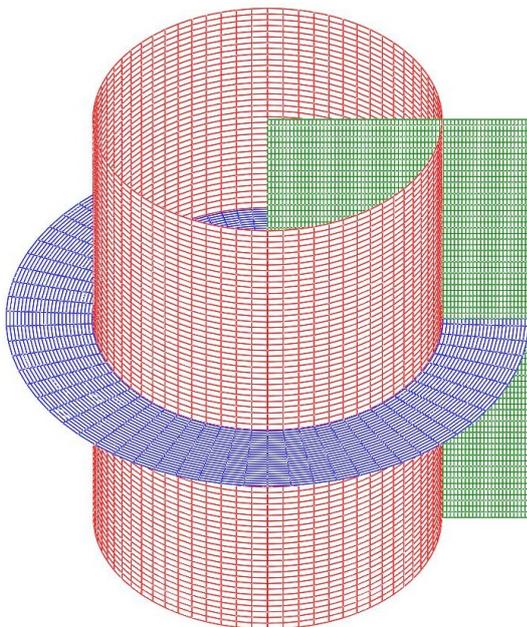
## 7 Anhang

Der Anhang enthält im Gegensatz zum Haupttext keine „trockene“ Mathematik in Form von theoretischen Herleitungen und Beispielrechnungen, sondern soll zwei Aspekte des vorangegangenen Textes anschaulich darstellen. Dies ist einerseits möglich bei den in Abschnitt 4 angesprochenen Koordinatensystemen, deren Aufbau und Unterschiede zum gewohnten rechtwinkligen Koordinatensystem dadurch deutlich gemacht werden können. Zum anderen wird der in Abschnitt 6 durchgehend verwendete Beispielkörper mit verschiedenen Kombinationen der dort verwendeten Parameter visualisiert. Dies ermöglicht auch den Einfluss der Parameter auf das Aussehen des Körpers sichtbar zu machen.

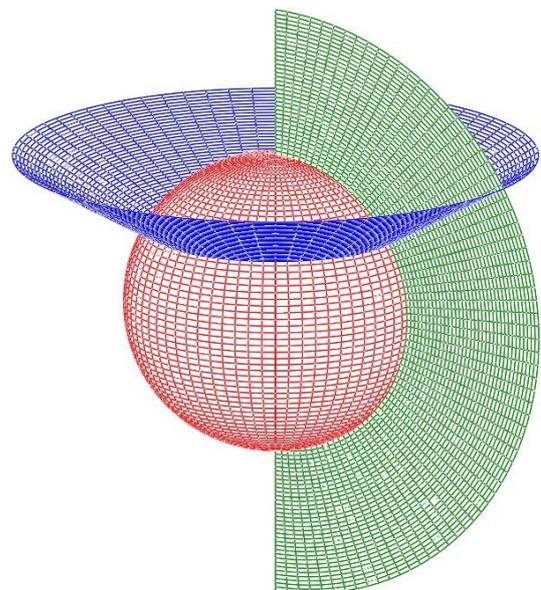
### 7.1 Visualisierung von Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten



Polarkoordinaten. Die vom Ursprung ausgehenden Strahlen repräsentieren Punkte mit konstantem Winkel  $\varphi$ , die konzentrischen Kreise Punkte mit konstantem Abstand  $r$  vom Ursprung.

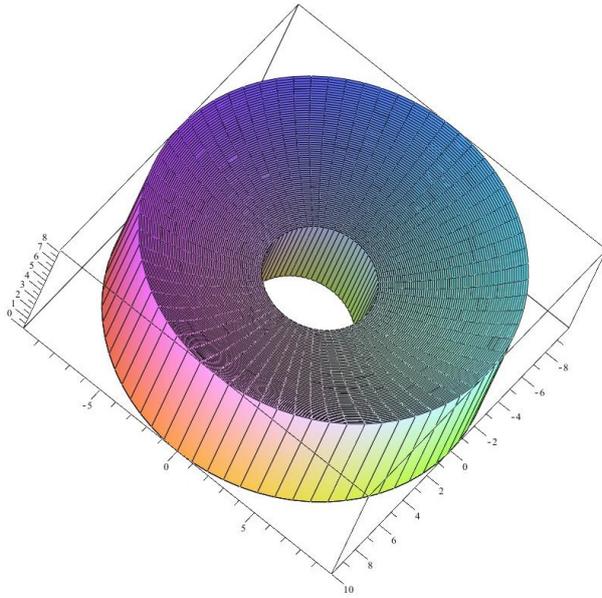


Zylinderkoordinaten. Die farbigen Flächen repräsentieren Punkte mit konstantem  $\rho$  (rot),  $\varphi$  (grün) und  $z$  (blau).

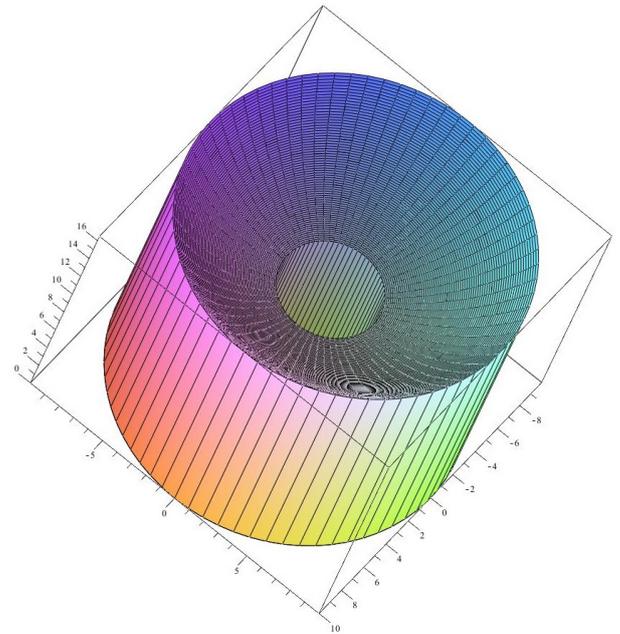


Kugelkoordinaten. Die farbigen Flächen repräsentieren Punkte mit konstantem  $r$  (rot),  $\varphi$  (grün) und  $\vartheta$  (blau).

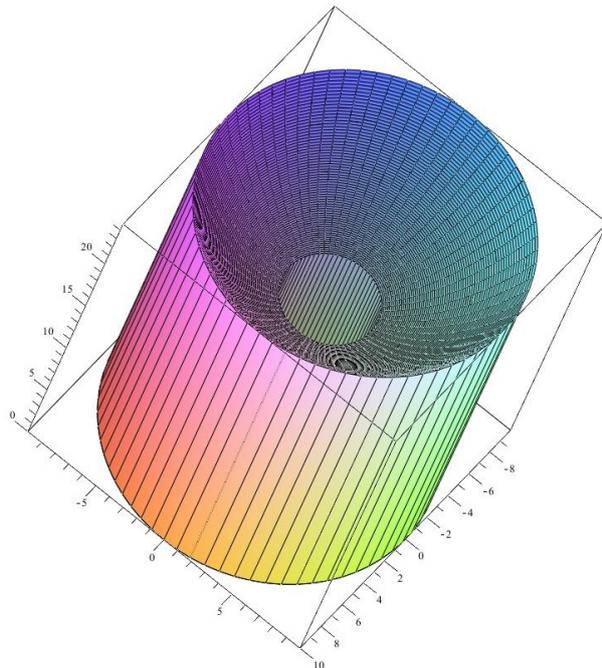
## 7.2 Visualisierung des Beispielkörpers



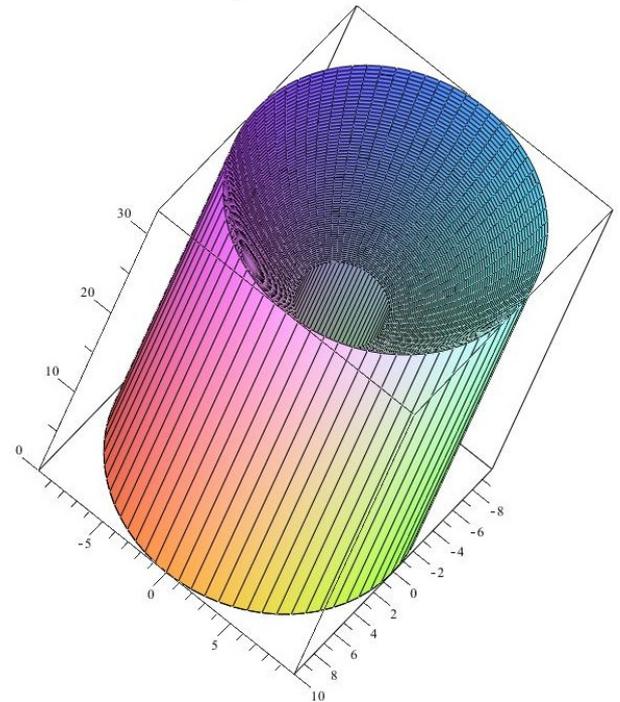
$$a = 5, b = \frac{1}{200}, r_1 = 3, r_2 = 10$$



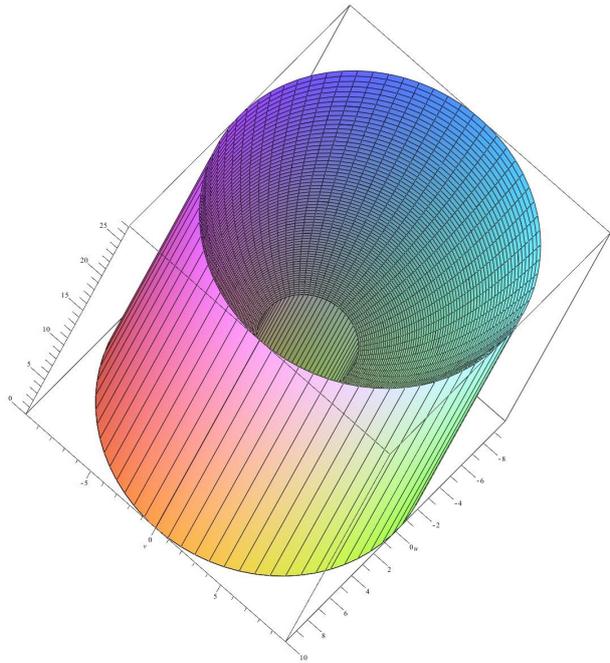
$$a = 10, b = \frac{1}{200}, r_1 = 3, r_2 = 10$$



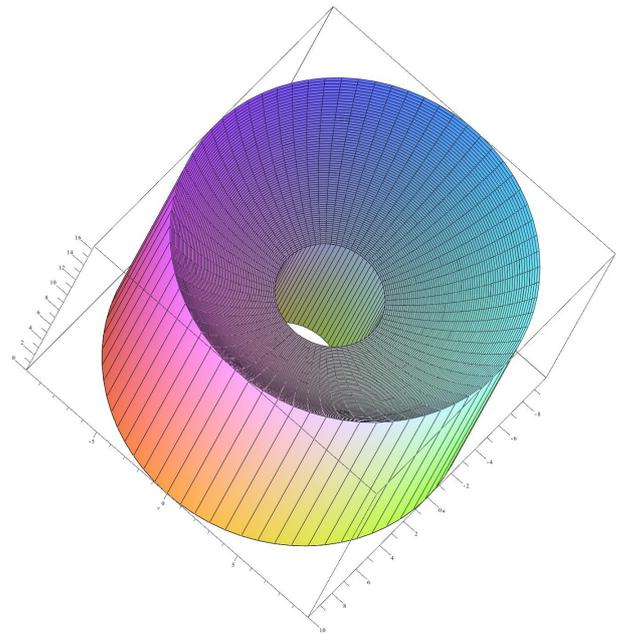
$$a = 15, b = \frac{1}{200}, r_1 = 3, r_2 = 10$$



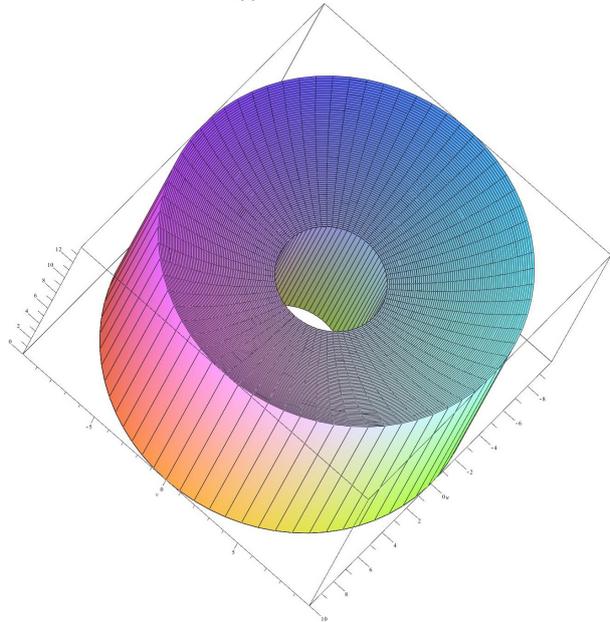
$$a = 20, b = \frac{1}{200}, r_1 = 3, r_2 = 10$$



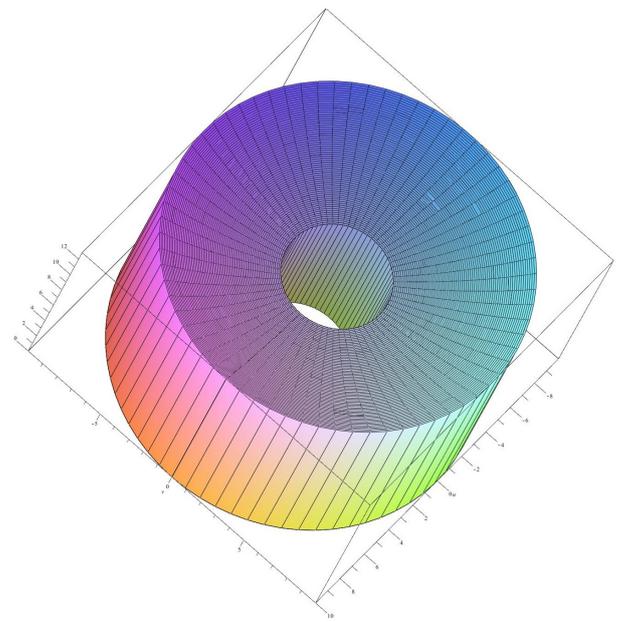
$$a = 10, b = \frac{1}{100}, r_1 = 3, r_2 = 10$$



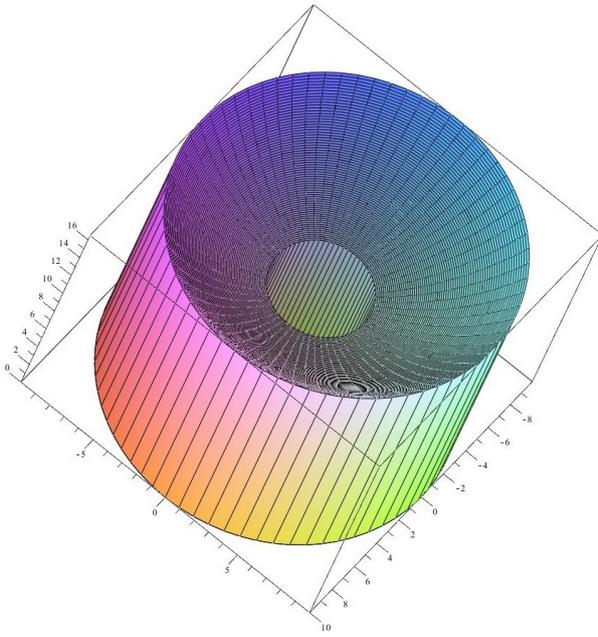
$$a = 10, b = \frac{1}{200}, r_1 = 3, r_2 = 10$$



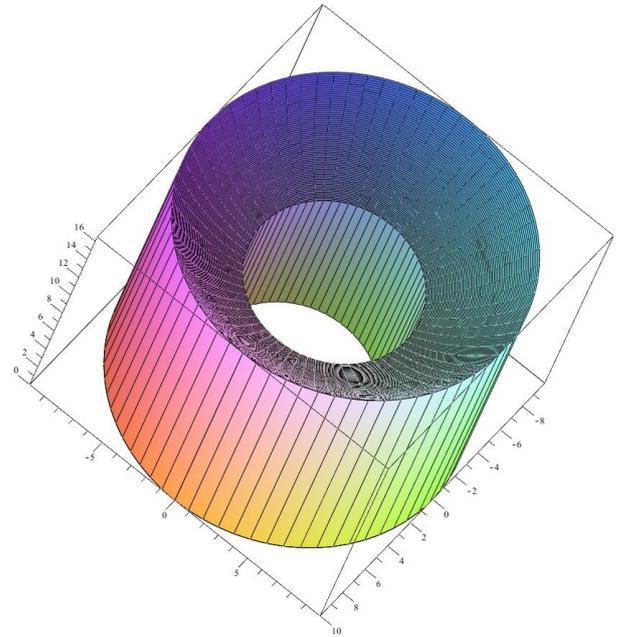
$$a = 10, b = \frac{1}{300}, r_1 = 3, r_2 = 10$$



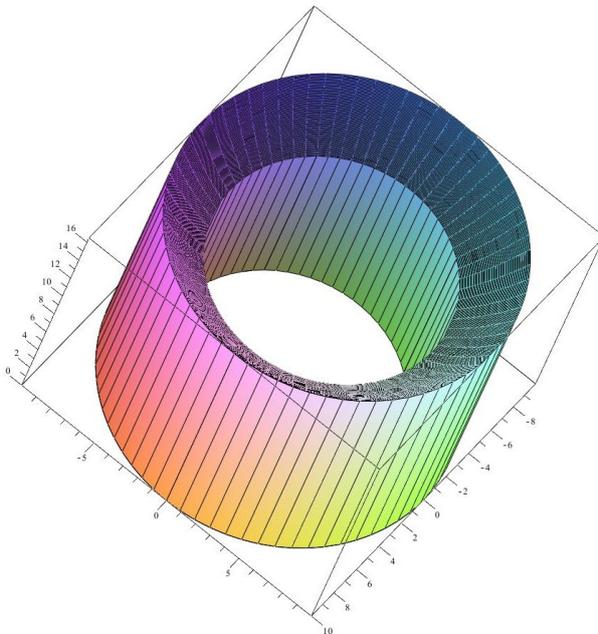
$$a = 10, b = \frac{1}{400}, r_1 = 3, r_2 = 10$$



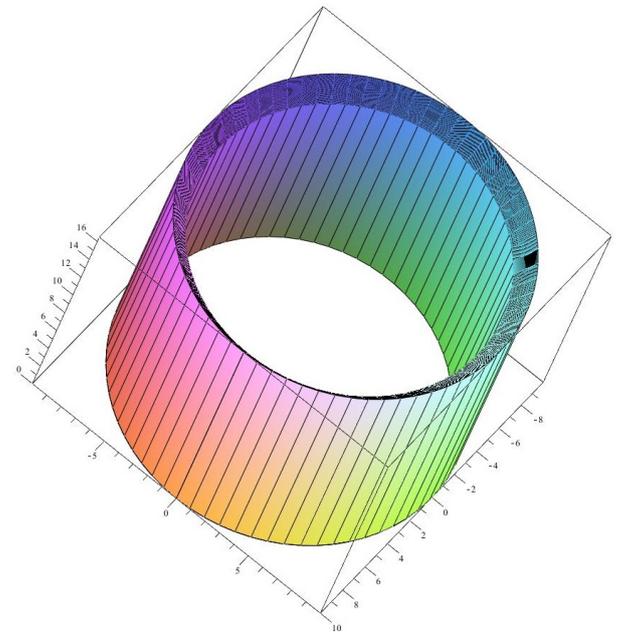
$$a = 10, b = \frac{1}{200}, r_1 = 3, r_2 = 10$$



$$a = 10, b = \frac{1}{200}, r_1 = 5, r_2 = 10$$



$$a = 10, b = \frac{1}{200}, r_1 = 7, r_2 = 10$$



$$a = 10, b = \frac{1}{200}, r_1 = 9, r_2 = 10$$

## Literatur

- [1] ARENS, T. et al, Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008, 2009, 1. korrigierter Nachdruck
- [2] BARTH, W.P., Analysis II für Physiker, Uni Erlangen-Nürnberg, SS 2006, Skript (<http://www.mi.uni-erlangen.de/~barth/skripten.shtml>, 16.10.09)
- [3] BRONSTEIN, I. N. et al, Taschenbuch der Mathematik, Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2008, 7. vollständig überarbeitete und ergänzte Auflage
- [4] FERUS, D., Analysis II für Ingenieure, TU Berlin, Skript (<http://www.math.tu-berlin.de/~ferus/skripten.html>, 16.10.09)
- [5] FICHTENHOLZ, G. M., Differential- und Integralrechnung III, JOHANN AMBROSIUS BARTH Verlag GmbH, Leipzig, 1992, 12. berichtigte Auflage
- [6] GAILE, S., Integration in mehreren Dimensionen, Uni Erlangen-Nürnberg, SS 2006, Skript (<http://www.am.uni-erlangen.de/~steffi/>, 31.10.09)
- [7] HULEK, K., Analysis B, Uni Hannover, WS 2004/2005, Skript (<http://www.iag.uni-hannover.de/~hulek/Skripten/index.html>, 16.10.09)
- [8] SINGHOF, W., Analysis I, Uni Düsseldorf, SS 2009, Skript ([http://www.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Ana1\\_SS09/](http://www.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Ana1_SS09/), 16.10.09)
- [9] ZIEZOLD, H., Mathematik für Naturwissenschaftler II, Uni Kassel, SS 2007, Skript ([http://www.mathematik.uni-kassel.de/~ziezold/LV/MfNw/,MfNw\\_II\\_2007.pdf](http://www.mathematik.uni-kassel.de/~ziezold/LV/MfNw/,MfNw_II_2007.pdf), 01.12.09)